

Beweis in 6 Schritten:

1.) Beh: $A_1 \cup A_2$ messbar

$(\Rightarrow \text{induktiv}) \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ messbar } \forall n$

Begründung:

Für messbare $A \subset X$ gilt:

$$(*) \quad \mu(\tilde{T}) = \mu(\tilde{T} \cap A) + \mu(\tilde{T} - A) \quad \forall \tilde{T}$$

$$\Rightarrow \mu(T) = \mu(T \cap A_1) + \mu(T - A_1) \quad \forall T \quad \underline{\underline{(1)}}$$

A_2 ist messbar, benutze $(*)$ mit

$$\tilde{T}_1 = T - A_1, \quad A := A_2$$

$$\Rightarrow \mu(T - A_1) = \mu((T - A_1) \cap A_2) + \mu((T - A_1) - A_2) \quad \underline{\underline{(2)}}$$

Einsetzen von (2) in (1) $\Rightarrow$

$$\mu(T) = \mu(T \cap A_1) +$$

$$(3) \quad \mu((T - A_1) \cap A_2) +$$

$$\mu((T - A_1) - A_2)$$

beachte:

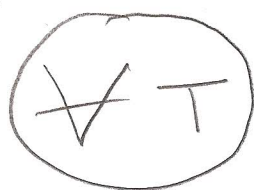
$$(T \cap A_1) \cup [(T - A_1) \cap A_2] \supset$$

$$T \cap (A_1 \cup A_2),$$

$$(T - A_1) - A_2 = T - (A_1 \cup A_2)$$

(3)
 $\Rightarrow$
Subadditivität

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(T - (A_1 \cup A_2))$$



$\Rightarrow A_1 \cup A_2$ messbar.

2.) Beh: $\bigcap_{k=1}^n A_k$ messbar $\forall n$

Begründung: nur $n=2$, dann Induktion

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } X - (A_1 \cap A_2) &= \\ (X - A_1) \cup (X - A_2) &\quad (4) \end{aligned}$$

Die "Komplementregel" bedeutet Messbarkeit von $X - A_i$, nach Schritt 1 ist die rechte Seite von (4) messbar. Komplementregel folgt Beh.

3.) Wir zeigen ii): Seien

$$A_k \cap A_l = \emptyset$$

$$\forall k \neq l$$

O. E. gelte $\mu(A_e) < \infty \quad \forall e$,
sonst ist ia) trivial. Setze

$$B_k := \bigcup_{e=1}^k A_e$$

(messbar nach 1.)

A_{k+1} messbar $\implies (B_{k+1} \text{ als Testmenge})$

$$\begin{aligned} \mu(B_{k+1}) &= \mu(B_{k+1} \cap A_{k+1}) + \mu(B_{k+1} - A_{k+1}) \\ &= \mu(A_{k+1}) + \mu(B_k) \end{aligned}$$

$$\implies \mu(B_{k+1}) - \mu(B_k) = \mu(A_{k+1}) \quad \underline{(5)}$$

$$\text{Es folgt: } \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \mu(B_n) =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\mu(B_{k+1}) - \mu(B_k) \right) + \mu(B_1)$$

(Teleskopsumme)

$$\stackrel{=}{(5)} \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_{k+1}) + \mu(B_1)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

$\Rightarrow$ ii) für endliche Vereinigungen;

die Monotonie ergibt:

$$\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \stackrel{\text{p.o.}}{=} \mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq$$

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \xRightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

und " $\geq$ " folgt aus der Subadditivität.

Damit ist ii) vollständig bewiesen.

4.) Jetzt gelte $A_k \subset A_{k+1} \quad \forall k$

$$\Rightarrow A_{k+1} - A_k = A_{k+1} \cap (X - A_k)$$

messbar nach 2.);

setze $A_0 := \emptyset \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [A_k - A_{k-1}]\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k - A_{k-1}) =$$

ii)
für $A_k - A_{k-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k - A_{k-1}) \stackrel{iii)}{=} \quad$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{k=1}^n [A_k - A_{k-1}] \right) =$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= A_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Es folgt iii).

5.) Beweis von iv) $\rightarrow$ Skript!

6.) Beweis von i), also

Messbarkeit von $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

$\rightarrow$ Skript!



Ausblick : Die Eigenschaften
 μ -messbarer Mengen motivieren
 den Begriff der

$\mathcal{E}$ -Algebra: Sei X eine Menge.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine $\mathcal{E}$ -
 Algebra, falls

$$(i) \quad \emptyset, X \in \mathcal{M}$$

$$(ii) \quad A \in \mathcal{M} \implies X - A \in \mathcal{M}$$

$$(iii) \quad A_n \in \mathcal{M} \text{ für } n \in \mathbb{N} \implies$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

Aus (ii) + (iii) folgt:

$$A_n \in \mathcal{M} \text{ für } n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

Korollar (zu Satz 23.2):

Sei μ ein äußeres Maß auf der Trägermenge X . Dann ist

$\mathcal{M}_{\mu} := \{ A \subset X : A \text{ ist } \mu\text{-messbar} \}$
eine σ -Algebra.

anderer Zugang zur Maßtheorie:

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt ein Maßraum,

falls $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra

ist und $\lambda: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ -206-

eine Abbildung ist mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(\emptyset) = 0, \quad \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \text{ für } A_i \in \mathcal{M} \text{ mit} \\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j. \end{array} \right.$$

λ wird dann ein Maß genannt
und lebt per Def. nur auf $\mathcal{M}$.

offenbar: Ist μ ein äußeres Maß
auf X , so ist

$$(X, \mathcal{M}_{\mu}, \mu|_{\mathcal{M}_{\mu}})$$

ein Maßraum.

Ist umgekehrt $(X, \mathcal{M}, \lambda)$ ein

Maßraum, so ist

$$\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty],$$

$$\mu(A) := \inf \{ \lambda(B) : A \subset B, B \in \mathcal{M} \}$$

ein äußeres Maß.

$$\mu \leq \lambda \text{ auf } \mathcal{M} \text{ i.a.}$$



Maße auf metrischen Räumen

Def 23.4: Sei X ein metrischer Raum.

a) $\mathcal{B} := \mathcal{B}(X)$ ist die kleinste σ -Algebra in X , die alle offenen Mengen enthält,

genannt die σ -Algebra
der Borel-Mengen.

[formal: $\mathcal{B} := \bigcap \mathcal{U}$,

$\mathcal{U}$ ist σ -Algebra mit

$\mathcal{U} \supset \{ \text{offene Mengen in } X \};$

zeige(!): $\bigcap \mathcal{U}$ ist wieder σ -Algebra

anschaulich:

Borel-Mengen sind alle Teilmengen von X , die sich aus offenen und abgeschlossenen Mengen durch abzählbare Vereinigungen, Schnitte und Differenzen sowie Iteration

dieser Prozesse bilden lassen]

-209-

b) Ein Maß μ auf X heißt

Borel-Maß, falls

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\mu.$$

c) Ein Borel-Maß heißt Borel-regulär, falls gilt:

$$\forall A \subset X \quad \exists B \in \mathcal{B}(X), \\ B \supset A$$

mit $\mu(A) = \mu(B)$.

(es gibt also stets maßgleiche
Borel Übermengen)

d) Ist μ ein Borel-reguläres ⁻²¹⁰⁻

Maß mit

$$\mu(K) < \infty \quad \forall K \text{ Kompakt,$$

so liegt ein Radon-Maß vor

e) Eine Menge A heißt σ -endlich
bzgl. eines äußeren Maßes λ auf

$$X, \text{ falls } A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

geschrieben werden kann man mit

$$\underset{k}{B} \in \mathcal{M}_{\lambda}, \quad \lambda(B_k) < \infty$$

$$(\Rightarrow A \in \mathcal{M}_{\lambda})$$

↑
Lektion
13